Wahrscheinlichkeitsrechnung

GRUNDBEGRIFFE

Zufallsexperiment & Ergebnismenge

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch, der unter festgelegten Bedingungen (*evtl. auch wiederholt*) durchgeführt wird und einen zufälligen Ausgang hat.
Bei einem solchen Experiment sind mehrere Ausgänge/ Ergebnisse möglich. Alle möglichen Ergebnisse ($e_1, e_2, \ldots$) sind in der **Ergebnismenge $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots\}$** zusammengefasst.

BEISPIELE

1. Ein Spielwürfel wird einmal geworfen:

   $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

2. Eine Münze wird zweimal geworfen:
   k: Kopf
   z: Zahl

   $\Omega = \{ (k,k); (k,z); (z,k); (z,z)\}$

ALLGEMEINE INFOS

Wahrscheinlichkeitsrechnung

GRUNDBEGRIFFE

Ereignis

Das **Ereignis A** ist eine Teilmenge der Ergebnismenge.
Es können auch mehrere Ereignisse gleichzeitig eintreten.

BEISPIELE

Ein Spielwürfel wird einmal geworfen:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *Ergebnismenge*

Ereignis A ist z.B.: *„eine drei würfeln"*
$A = \{3\}$ *Elementarereignis*

Ereignis B ist z.B.: *„eine gerade Augenzahl* würfeln"
$B = \{2; 4; 6\}$ *Ereignis*

A heißt **unmögliches Ereignis**, wenn es nicht eintreten kann (*z.B. eine 7 beim Werfen eines Spielwürfels*):
$A = \{\ \}$ (*Die Teilmenge A ist dann die leere Menge*)

A heißt **sicheres Ereignis**, wenn es alle möglichen Ergebnisse beinhaltet: $A = \Omega$ (*A ist gleich der Ergebnismenge*)

„\" bedeutet „ohne"

$\overline{A}$ heißt **Gegenereignis** und tritt ein, wenn A nicht eintritt: $\overline{A} = \Omega \setminus A$
(z.B.: *Beinhaltet A alle geraden Zahlen, enthält* $\overline{A}$ *alle ungeraden)*

ALLGEMEINE INFOS

Wahrscheinlichkeitsrechnung

GRUNDBEGRIFFE

absolute & relative Häufigkeit

Ist ein Ereignis A bei n (*mehreren*) Durchführungen H-mal (*eine bestimmte Anzahl*) eingetreten,
so ist **H** die **absolute Häufigkeit.**

Die **relative Häufigkeit h** ergibt sich, indem man die absolute Häufigkeit durch die Anzahl der Durchführungen dividiert: $h = \frac{H}{n}$

BEISPIEL

Ein Spielwürfel wird zehn mal geworfen:

$n = 10$

Ereignis A „*eine sechs würfeln*“ ist zweimal eingetreten:

$H = 2$ *absolute Häufigkeit*

$$h = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 20\%$$ *relative Häufigkeit*

ALLGEMEINE INFOS

GRUNDBEGRIFFE

Gesetz der großen Zahlen

Führt man ein Zufallsexperiment mit n Durchführungen hinreichend oft aus, stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten.
Das **Gesetz der großen Zahlen** sagt somit aus, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei sehr vielen Durchführungen auf die theoretische Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses einpendelt.

Ein Spielwürfel wird 100 mal geworfen.
Das Ereignis A „eine sechs würfeln" tritt 15 mal ein:

$$h = \frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\%$$

Ein Spielwürfel wird 1000 mal geworfen.
Das Ereignis A „eine sechs würfeln" tritt 160 mal ein:

$$h = \frac{160}{1000} = 0{,}16 = 16\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine sechs zu Würfeln:

$$P(A) = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

Die relative Häufigkeit hat sich bei 1000 Durchführungen somit fast bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit eingependelt.

ALLGEMEINE INFOS

WAHRSCHEINLICHKEIT

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiment:
Ist jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments mit $\mathbf{\Omega} = \{e_1; e_2; \ldots\}$ eine positive reelle Zahl zugeordnet, sodass $P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1$, dann sind diese Zahlen **Wahrscheinlichkeiten**.
Die Wahrscheinlichkeit gibt also vor der Durchführung eines Zufallsexperiments an, wie die Chancen stehen, dass Ereignis A eintreffen wird.

BEISPIELE

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Würfeln eine 6 gewürfelt wird:

$P(A) = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\%$ *es gibt insgesamt 6 Zahlen (Nenner)*

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Werfen einer Münze Kopf fällt:

$P(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ *es gibt insgesamt 2 Ergebnisse, Kopf und Zahl (Nenner)*

Prognose für …
…. ein **sicheres Ereignis**: $P(\mathbf{\Omega}) = 1$
… ein **unmögliches Ereignis**: $P(\varnothing) = 0$

ALLGEMEINE INFOS

WAHRSCHEINLICHKEIT

Laplace - Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace - Experiment**, wenn eine Gleichverteilung vorliegt, also alle Einzelergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

BEISPIELE

Ein **Laplace - Experiment** ist z.B. das Werfen eines Würfels oder einer Münze, weil alle Zahlen des Würfels oder Seiten der Münze die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, einzutreten.

Kein Laplace - Experiment ist z.B. das Werfen eines gezinkten Würfels oder einer Reiszwecke.

Berechnung von **Wahrscheinlichkeiten in Laplace - Experimenten**

- Wsk. eines Elementarereignisses *e*: $\mathrm{P(e)} = \frac{1}{|\Omega|}$
- Wsk. eines Ereignisses A: $\mathrm{P(A)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|\mathbf{A}|$ Anzahl aller Ergebnisse des Ereignisses A
$|\boldsymbol{\Omega}|$ Anzahl aller möglichen Ergebnisse

BEISPIEL

Ein Würfel wird einmal geworfen: $\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad |\boldsymbol{\Omega}| = 6$

A: „eine gerade Zahl würfeln“: $\mathrm{A} = \{2; 4; 6\}$ $\quad |\mathrm{A}| = 3$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

ALLGEMEINE INFOS