Ganzrationale Funktionen

NULLSTELLEN

Für die Berechnung der Nullstellen wird die Funktionsgleichung $f(x) = 0$ gesetzt.

Beispiele: Wie erkenne ich, welches Verfahren anzuwenden ist?

1 $0 = 3x^3 + 12x^2 - 36x$ *Ausklammern*

- enthält jeder Koeffizient mind. ein x, wird das x mit der kleinsten Potenz ausgeklammert (*hier x^1*)
- nach dem Ausklammern muss häufig noch eine lineare oder quadratische Gleichung gelöst werden

2 $0 = 20x^3 - 36x^2 - 11x + 6$ *Polynomdivision*

- enthält die Funktion ein Absolutglied (*hier 6*), so muss die Polynomdivision durchgeführt werden
- im Anschluss muss häufig noch eine quadratische Gleichung gelöst werden

3 $0 = 2x^4 - 14x^2 + 24$ *Substitution*

- biquadratische Gleichung:
Gleichung vierten Gerades, die nur gerade Exponenten enthält
- wird mit der p-q-Formel gelöst

Eine ganzrationale Funktion hat max. so viele Nullstellen, wie ihr höchster Grad beträgt.

ALLGEMEINE INFOS

Ganzrationale Funktionen

NULLSTELLEN BERECHNEN

1

$f(x) = 3x^3 + 12x^2 - 36x$

Ausklammern

$$0 = 3x^3 + 12x^2 - 36x$$

$$0 = x \cdot (3x^2 + 12x - 36)$$

SCHRITT 1

- f(x) = 0 setzen
- x ausklammern

$$0 = x \cdot (3x^2 + 12x - 36)$$

$$\Longrightarrow x_1 = 0$$

$$0 = 3x^2 + 12x - 36 \quad |:3$$

$$0 = x^2 + 4x - 12 \quad | pq - F.$$

$$x_1, x_2 = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-12)}$$

$$\Longrightarrow x_2 = 2 \wedge x_3 = -6$$

SCHRITT 2

„Produkt = 0 - Regel“

(*x = 0 und die Klammer = 0 setzen*)

Ein Produkt a•b ist null, wenn a oder b null sind!

$$N_1(-6 \mid 0) \;;\; N_2(0 \mid 0) \;;\; N_3(2 \mid 0)$$

SCHRITT 3

die Nullstelle(n) angeben

die Funktion hat genau drei Nullstellen

Ganzrationale Funktionen

NULLSTELLEN BERECHNEN

2

$f(x) = 20x^3 - 36x^2 - 11x + 6$

Polynomdivision

SCHRITT 1 erste Nullstelle durch Ausprobieren bestimmen

$$f(2) = 20 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 6 = 0 \quad \surd$$

$$\Longrightarrow x_1 = 2$$

probiere alle Teiler des Absolutglieds aus

hier -1 , 1 , -2 , 2 , -3 ,3 , -6 , 6

SCHRITT 2 Polynomdivision: Linearfaktor $(x - x_1)$

$$(20x^3 - 36x^2 - 11x + 6) : (x - 2) = 20x^2 + 4x - 3$$

$20x^3 : x \quad 4x^2 : x \quad -3x : x$

$20x^2 \cdot (-2)$

$$\underline{-(20x^3 - 40x^2)}$$

$: x$

$$4x^2 - 11x$$

$4x \cdot (-2)$

$$\underline{-(4x^2 - 8x)}$$

$: x$

$$-3x + 6$$

$-3 \cdot (-2)$

$$\underline{-(-3x + 6)}$$

$$0$$

Grundlage hierfür ist die schriftliche Division

SCHRITT 3 quadratische Gleichung lösen

$$0 = 20x^2 + 4x - 3 \quad |:20$$

$$0 = x^2 + 0{,}2x - 0{,}15 \quad |\text{pq-F.}$$

$$\Longrightarrow x_2 = -0{,}5 \;\wedge\; x_3 = 0{,}3$$

Die Funktion hat genau drei Nullstellen.

Ganzrationale Funktionen

NULLSTELLEN BERECHNEN

3

$f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 24$

Substitution

$$0 = 2x^4 - 14x^2 + 24$$
$$0 = 2z^2 - 14z + 24$$

SCHRITT 1

substituiere x^2 mit z

substituieren = ersetzen

$$z = x^2$$

$$0 = 2z^2 - 14z + 24 \quad |:2$$
$$0 = z^2 - 7z + 12 \quad |\,pq\text{-}F.$$
$$z_1, z_2 = -\frac{(-7)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 12}$$
$$z_1, z_2 = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mathbf{z_1} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$
$$\mathbf{z_2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$$

SCHRITT 2

quadratische Gleichung lösen

(*mit der p-q-Formel*)

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \mathbf{x_1 = 2} \ \wedge\ \mathbf{x_2 = -2}$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \mathbf{x_3 = \sqrt{3}} \ \wedge\ \mathbf{x_4 = -\sqrt{3}}$$

SCHRITT 3

Ergebnis resubstituieren

$$z = x^2$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$$