Wahrscheinlichkeitsrechnung

BINOMIALVERTEILUNG

Die **Binomialverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit k Treffer erzielt werden. Die Wsk für einen Treffer ist p, die für eine Niete ist somit 1-p.
Hierfür wird ein **Zufallsversuch mit genau zwei Ausgängen** (Treffer & Niete) n mal durchgeführt.

Unter diesen Voraussetzungen ist der Versuch ein sogenanntes **Bernoulli-Experiment** (*die Zufallsgröße X zählt die Treffer*).

Formel von Bernoulli:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$$

n Durchführungen
k Treffer
p Trefferwahrscheinlichkeit

Info: Statt $P(X = k)$ kann auch $B_{n;p}(k)$ geschrieben werden.

ALLGEMEINE INFOS

Wahrscheinlichkeitsrechnung

BINOMIALVERTEILUNG

1.1

Lösen der Aufgabe mithilfe von Tabellen

$n = 50$ *50 Würfe insgesamt*

$k = 5$ *genau 5 Treffer*

$p = \frac{1}{6}$ *Wsk eine 6 zu würfeln*

wichtig: hier muss ein „=" stehen

Wertetafel zur Binomialverteilung (n = 50) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

n	k	p 0,01	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	k	n
	0	0,6050	0,0769	0,0052	0,0001	0,0000						50	
	1	0,3056	0,2025	0,0286	0,0011	0,0002	0,0000					49	
	2	0,0756	0,2611	0,0779	0,0054	0,0011	0,0001					48	
	3	0,0122	0,2199	0,1386	0,0172	0,0044	0,0004	0,0000				47	
	4	0,0015	0,1360	0,1809	0,0405	0,0128	0,0016	0,0001	0,0000			46	
	5	0,0001	0,0658	0,1849	0,0745	0,0295	0,0049	0,0006	0,0001			45	
	6	0,0000	0,0260	0,1541	0,1118	0,0554	0,0123	0,0018	0,0004			44	
	7		0,0086	0,1076	0,1405	0,0870	0,0259	0,0048	0,0012	0,0000		43	
	8		0,0024	0,0643	0,1510	0,1169	0,0463	0,0110	0,0033	0,0002		42	
	9		0,0006	0,0333	0,1410	0,1364	0,0721	0,0220	0,0077	0,0005		41	
	10		0,0001	0,0152	0,1156	0,1398	0,0985	0,0386	0,0157	0,0014		40	
	11		0,0000	0,0061	0,0841	0,1271	0,1194	0,0602	0,0286	0,0035	0,0000	39	
	12			0,0022	0,0546	0,1033	0,1294	0,0838	0,0465	0,0076	0,0001	38	
	13			0,0007	0,0319	0,0755	0,1261	0,1050	0,0679	0,0147	0,0003	37	
	14			0,0002	0,0169	0,0499	0,1110	0,1189	0,0898	0,0260	0,0008	36	
	15			0,0001	0,0081	0,0299	0,0888	0,1223	0,1077	0,0415	0,0020	35	
	16			0,0000	0,0035	0,0164	0,0648	0,1147	0,1178	0,0606	0,0044	34	
	17				0,0014	0,0082	0,0432	0,0983	0,1178	0,0808	0,0087	33	
	18				0,0005	0,0037	0,0264	0,0772	0,1080	0,0987	0,0160	32	
50	19				0,0002	0,0016	0,0148	0,0558	0,0910	0,1109	0,0270	31	50
	20				0,0001	0,0006	0,0077	0,0370	0,0705	0,1146	0,0419	30	
	21				0,0000	0,0002	0,0036	0,0227	0,0503	0,1091	0,0598	29	
	22					0,0001	0,0016	0,0128	0,0332	0,0959	0,0788	28	

Die Wahrscheinlichkeit 5 mal eine 6 zu würfeln beträgt ca. 7,45%.

Quelle: *https://www.nibis.de/nli1/gohrgs/13_zentralabitur/mathe/2008tabelle_binomialverteilung_neuneu.pdf*

Wahrscheinlichkeitsrechnung

BINOMIALVERTEILUNG

2

Ein Würfel wird 50-mal geworfen. Die Zufallsgröße X (*X=k*) zählt die **Anzahl der 6en**. Berechne die **Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 mal eine 6 gewürfelt wird.**

SCHRITT 1

Entnimm der Aufgabe die Werte für n, k und p.

$n = 50$ — *50 Würfe insgesamt*

$k \leq 2$ — *max. 2 Treffer*

$p = \frac{1}{6}$ — *Wsk eine 6 zu würfeln*

SCHRITT 2

Setze die Werte in die Formel von Bernoulli ein.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

höchstens 2x zu treffen beinhaltet:

$$= \binom{50}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50-0}$$

nicht (0x) zu treffen

$$+ \binom{50}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50-1}$$

1x zu treffen

$$+ \binom{50}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50-2}$$

2x zu treffen

$$P(X \leq 2) = \sum_{X=0}^{2} \binom{50}{X} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{X} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50-X}$$

Dies kann mit der Summenformel kürzer zusammengefasst werden.

SCHRITT 3

Berechne mit dem Taschenrechner.

$$P(X \leq 2) \approx 0{,}0066 = 0{,}66\%$$

Die Wahrscheinlichkeit höchstens 2 6en zu würfeln beträgt ca. 0,66%.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

BINOMIALVERTEILUNG

2.1

Lösen der Aufgabe mithilfe von Tabellen

$n = 50$ — *50 Würfe insgesamt*

$k \leq 2$ — *max. 2 Treffer*

$p = \frac{1}{6}$ — *Wsk eine 6 zu würfeln*

wichtig: hier muss ein „≤" stehen

Summierte Binomialverteilung (n = 50)

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

n	k	p 0,01	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	k	n
	0	0,6050	0,0769	0,0052	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,9106	0,2794	0,0338	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9862	0,5405	0,1117	0,0066	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9984	0,7604	0,2503	0,0238	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9999	0,8964	0,4312	0,0643	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	45	
	5	1,0000	0,9622	0,6161	0,1388	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	44	
	6		0,9882	0,7702	0,2506	0,1034	0,0194	0,0025	0,0005	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,3911	0,1904	0,0453	0,0073	0,0017	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,5421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0050	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,6830	0,4437	0,1637	0,0402	0,0127	0,0008	0,0000	40	
	10		1,0000	0,9906	0,7986	0,5836	0,2622	0,0789	0,0284	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,8827	0,7107	0,3816	0,1390	0,0570	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9373	0,8139	0,5110	0,2229	0,1035	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9693	0,8894	0,6370	0,3279	0,1715	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9862	0,9393	0,7481	0,4468	0,2612	0,0540	0,0013	35	
	15			1,0000	0,9943	0,9692	0,8369	0,5692	0,3690	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9978	0,9856	0,9017	0,6839	0,4868	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9992	0,9937	0,9449	0,7822	0,6046	0,2369	0,0164	32	
	18				0,9997	0,9975	0,9713	0,8594	0,7126	0,3356	0,0325	31	
50	19				0,9999	0,9991	0,9861	0,9152	0,8036	0,4465	0,0595	30	50
	20				1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8741	0,5610	0,1013	29	
	21					0,9999	0,9974	0,9749	0,9244	0,6701	0,1611	28	
	22					1,0000	0,9990	0,9877	0,9576	0,7660	0,2399	27	

Die Wahrscheinlichkeit höchstens 2 6en zu würfeln beträgt ca. 0,66%.

Quelle: *https://www.nibis.de/nli1/gohrgs/13_zentralabitur/mathe/2008tabelle_binomialverteilung_neuneu.pdf*

Wahrscheinlichkeitsrechnung

3

BINOMIALVERTEILUNG

Ein Würfel wird 50-mal geworfen. Die Zufallsgröße X (*X*=*k*) zählt die **Anzahl der 6en**. Berechne die **Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 mal eine 6 gewürfelt wird.**

SCHRITT 1

Entnimm der Aufgabe die Werte für n, k und p.

$n = 50$ — *50 Würfe insgesamt*

$k \geq 5$ — *mind. 5 Treffer*

$p = \frac{1}{6}$ — *Wsk eine 6 zu würfeln*

SCHRITT 2

Setze die Werte in die Formel von Bernoulli ein.

$$\sum_{X=5}^{50} \binom{50}{X} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{X} \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{50-X}$$

Diese Berechnung dauert mit dem TR sehr lange, da alle Treffer von 5 - 50 einzeln berechnet werden.

Deshalb wird mit der Gegenwahrscheinlichkeit gearbeitet:
Diese beinhaltet alle Treffer, die nicht zwischen 5 und 50 liegen.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = \underline{1 -} \sum_{X=0}^{4} \binom{50}{X} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{X} \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{50-X}$$

„mindestens" ist häufig ein Signalwort, um die Gegenwahrscheinlichkeit zu verwenden

SCHRITT 3

Berechne mit dem Taschenrechner.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}0643 = 0{,}9357 = 93{,}57\%$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 93,57%.